Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________________/Д.С. Гуц/
«30» сентября 2020 г.

ПРОГРАММА
вступительного испытания для поступающих в аспирантуру
по направлению 01.06.01 Математика и механика
программа (профиль) 01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел

Красноярск 2020

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по группе специальностей 01.01.00 состоит из общей и специальной частей.

Общая часть содержит основные вопросы из действительного и комплексного анализа, топологии, дифференциальных уравнений, математической физики, алгебры, геометрии и теории вероятностей, которыми должен свободно владеть каждый желающий поступить в аспирантуру по данным специальностям.

Вторая (специальная) часть содержит дополнительные вопросы по специальности, читаемые как в общих, так и специальных курсах лекций.

1. Перечень вопросов общей части.

1.1. Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения топологических пространств. Компактность в топологических пространствах.

1.2. Понятие метрического пространства. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений и его применения.

1.3. Мера Лебега. Измеримые функции и их свойства. Теорема Д.Ф. Егорова. Интеграл Лебега и его основные свойства. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

1.4. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы функций. Полные системы, критерий полноты. Неравенство Бесселя. Сходимость рядов Фурье в гильбертовом пространстве. Равенство Парсеваля.

1.5. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. Теоремы Фредгольма.

1.6. Линейные пространства и их подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера Капелли.

1.7. Билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах. Приведение квадратичных форм к нормальному виду. Закон инерции.

1.8. Линейные отображения в линейных пространствах. Собственные векторы и собственные значения. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.

1.9. Группы. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизме.

1.10. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

1.11. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

1.12. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, их классификация. Задача Дирихле для уравнения Лапласа.

1.13. Элементарные функции комплексного переменного и связанные с ними конформные отображения. Дробно-линейные функции. Простейшие многозначные функции.

1.14. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитических функций.

1.15. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Нормальная кривизна поверхности. Геодезические линии. Формула Эйлера. Гауссова кривизна поверхности.

1.16. Понятие о простейшей проблеме вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

1.17. Схема Бернулли. Теорема Муавра-Лапласа.

1.18. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

2. Перечень вопросов специальной части.

2.1 Математическая логика.

2.1.1. Логика высказываний. Исчисление высказываний, его корректность и полнота.

2.1.2. Логика предикатов первого порядка: язык, интерпретации, модели. Теорема компактности, теорема Левенгейма - Скулема. Исчисление предикатов первого порядка, его корректность.

2.1.3. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов первого порядка. Нестандартные модели арифметики.

2.1.4. Теории первого порядка. Полные теории. Категоричные в данной мощности теории. Разрешимые теории. Категоричность в счетной мощности теории плотного порядка без первого и последнего элементов.

2.1.5. Парадоксы наивной теории множеств. Аксиоматическая теория множеств. Аксиома выбора. Вполне упорядоченные множества и теорема Цермело. Лемма Цорна. Континуум-гипотеза.

2.1.6. Общее понятие алгоритма. Варианты формализации понятия алгоритма. Универсальный алгоритм. Вычислимые функции, перечислимые и разрешимые множества. Неразрешимые алгоритмические проблемы. Теорема Раиса.

2.1.7. Первая теорема Геделя о неполноте формальной арифметики. Неразрешимость формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике. Теорема Черча о неразрешимости логики предикатов.

2.1.8. Время и память как меры сложности вычислений. Классы P, NP и PSPACE. Полиномиальная сводимость. NP-полные проблемы.

2.2. Алгебра.

2.2.1. Основные алгебраические системы с одной и двумя бинарными операциями (группы, полугруппы, ассоциативные кольца, кольца и алгебры Ли) и их подсистемы.

2.2.2. Смежные классы группы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Нормальные подгруппы и классы сопряженных элементов. Теоремы о гомоморфизмах групп и колец.

2.2.3. Теоремы Силова. Центр и коммутант группы. Простые, разрешимые и нильпотентные группы.

2.2.4. Задание групп образующими элементами и определяющими соотношениями. Алгоритмические проблемы для конечно определенных групп.

2.2.5. Конечные поля. Поля алгебраических чисел.

2.2.6. Конечно порожденные модули над кольцами главных идеалов и конечно порожденные абелевы группы. Теория жордановой нормальной формы.

2.2.7. Нетеровы кольца. Теорема Гильберта о базисе.

2.2.8. Представления групп. Теорема Кэли. Лемма Шура. Теорема Машке.

2.2.9. Характеры представлений. Определяемость представления своим характером. Представления конечных групп.

2.3. Теория чисел.

2.3.1. Теорема о разложении целых чисел в произведение простых сомножителей. Важнейшие арифметические функции.

2.3.2. Сравнения, их свойства. Теоремы Эйлера и Ферма.

2.3.3. Сравнения с одной неизвестной величиной.

2.3.4. Сравнения второй степени. Квадратичный закон взаимности.

Первообразные корни и индексы.

2.3.5. Сравнения высших степеней.

Список рекомендованных источников.

1. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии.
2. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.
5. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.
7. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры.
8. Маркушевич А. И. Введение в теорию аналитических функций.
9. Никольский С. М. Курс математического анализа.
10. Петровский И. Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
11. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
12. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного.

Составитель программы:

В. М. Левчук, д-р физ.-мат. наук, профессор.

Программа соответствует паспорту номенклатуры специальностей научных работников.

О. Н. Черепанова И.О. директора института математики и фундаментальной информатики