

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Сибирский федеральный университет»**

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе,

д-р пед. наук, профессор

Гафурова Д. В. Гафурова



ПРОГРАММА

кандидатского экзамена

по специальности 01.01.07 Вычислительная математика

Красноярск 2012

ПРОГРАММА-МИНИМУМ
кандидатского экзамена по специальности
01.01.07 «Вычислительная математика»
по физико-математическим наукам

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: функциональный анализ; уравнения математической физики; численные методы. Программа разработана экспертным советом Высшей аттестационной комиссии по математике и механике при участии Института вычислительной математики РАН, Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова и Института прикладной математики.

1. Функциональный анализ

Метрические, нормированные, гильбертовы пространства.

Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.

Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

Линейные функционалы и операторы.

Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.

Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и

нахождения собственных значений (методы Рунге, Бунднова-Галеркина, наименьших квадратов).

Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

Пространства функций C , L_2 , L_p , W_p^1 .

Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

2. Задачи математической физики

Математические модели физических задач.

Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений.

Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

Задача Коши.

Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).

Фундаментальные решения. Характеристики.

Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

3. Численные методы

Численные методы алгебры.

Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.

Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.

Приближение функций.

Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.

Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.

Численное интегрирование.

Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.

Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.

Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики.

Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.

Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач. методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

Методы решения сеточных уравнений.

Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.

Методы решения обратных и некорректных задач.

Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

Литература

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии / П.С. Александров. – Сп-б.: Лань, 2008 г. ISBN 978-5-8114-0812-2.
2. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – 77 с.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. – Ижевск: УдмГУ, 2000 г., -368 с.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С.Бахвалов, Н.П. Жидков, Б.М.Кобельков. –М.: Бинوم. Лаборатория знаний, 2011 г.
5. Боресков А.В., Харламова А.А. Основы работы с технологией CUDA. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 232 с.
6. Вержбицкий В.М. Численные методы / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш.шк; 2005 г.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С.Владимиров, В.В.Жаринов. – М.: Физматлит, 2008 г., - 400 с.
8. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах: Учебное пособие для ВУЗов. Мю: Физматлит. 2004.
9. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н.Калиткин. –Сп.-б.: БХВ-Петербург, 2011 г. – 592 с.
- 10.Ковеня В.М. Разностные методы решения многомерных задач. Новосибирск: НГУ, 2004.

11. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функциональный анализ / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2009 г., -572 с.
12. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. / Л.Д. Кудрявцев -М.: Дрофа, 2003. - 704 с.
13. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Физматкнига, 2007 г. – 432 с.
14. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры / А.И. Мальцев. – М.: Лань, 2009 г., - 480 с.
15. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Лань, 2009 г., - 608 с.
16. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
17. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / –М.: Физматлит, 2009 г., - 208 с.
18. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001 г., - 400 с.
19. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Лань, 2009 г., -432 с.
20. Самарский А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Научный мир, 2003 г.
21. Самарский А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Научный мир, 2003 г.
22. Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М.: Физматлит, 2005 г., -368 с.
23. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Физматлит, 2007 г., -488 с.
24. Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.И. Фаддеева. – М.: Лань, 2002 г., -736 с.