МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Сибирский федеральный университет»

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе,
д-р пед. наук, проф.
[illegible]ова

ПРОГРАММА
кандидатского экзамена по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Красноярск 2012

ПРОГРАММА-МИНИМУМ
кандидатского экзамена по специальности
01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: математическая логика; алгебра; теория чисел. Программа разработана экспертным советом Высшей аттестационной комиссии по математике и механике при участии Математического института им. В.А. Стеклова РАН и Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова.

1. Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.
2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.
3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.
4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ).
5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.
8. * Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.
9. * Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.
10. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.
11. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
12. * Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
13. * Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.
14. * Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

2. Алгебра

15. Теоремы Силова.
16. Простота группы A_n, $n \geq 5$ и SO_3.

17. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.
18. Свободные группы и определяющие соотношения.
19. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
20. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.
21. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности.
22. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.
23. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
24. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
25. * Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
26. * Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.
27. * Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

3. Теория чисел

28. Квадратичный закон взаимности.
29. Первообразные корни и индексы.
30. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.
31. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.
32. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
33. * Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
34. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
35. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
36. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
37. Трансцендентность чисел e и π.

Список литературы

1. Кострикин А.И., Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. М.: Физ.-мат. лит., 2000.
2. Кострикин А.И., Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физ.-мат. лит., 2000.
3. Кострикин А.И., Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры. М.: Физ.-мат. лит., 2000.
4. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы, М.: Едиториал УРСС, 2009.
5. Курош А.Г., Лекции по общей алгебре. Санкт-Петербург: Лань, 2007.

6. Скорняков Л.А., Общая алгебра. Т. 1., М.: Наука, 1990.
7. Клини С.К., Математическая логика. М.: ЛКИ, 2008.
8. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А., Математическая логика. Санкт-Петербург: Лань, 2004.
9. Лидл Р., Пильц Г., Прикладная абстрактная алгебра, Екатеринбург, Изд-во Уральского ун-та, 1996.
10. Биркгоф Г., Барти Т., Современная прикладная алгебра, М., Мир, 1976.
11. Ван дер Варден Б.Л., Алгебра. М.: Наука, 1976.
12. Мальцев А.И., Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
13. Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Теория доказательств. М.: Наука. 1982.
14. Мальцев А.И.. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука. 1965.
15. Новиков П.С., Элементы математической логики. М.: Наука. 1973.
16. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука. 1982.
17. Курош А.Г., Теория групп. М.: Наука. 1968.
18. Холл М., Теория групп. М.: Мир. 1962.
19. Carter R. Simple groups of Lee type. Willey and Suns, NY, 1972.
20. Rybakov V.V., Admissibility of logical inference rules. Amsterdam: Elsevier, 1997.