МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Сибирский федеральный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе,
д-р педагог. наук, профессор
________________ Н.В. Гафурова

ПРОГРАММА
кандидатского экзамена по специальности 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Красноярск 2012

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

по физико-математическим наукам

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

I. Действительный анализ

1. Меры, измеримые функции, интеграл.

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини. ([3], гл. V; [6], гл. III-VI, XI, XII; [2], гл. 1-4)

2. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования.

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса. ([3], гл. VI; [6], гл. VIII, IX, XIII, XVII; [2], гл. 5)

3. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды.

Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L^p , их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в L^2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы. ([3], гл. VII; [6], гл. VII)

4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье

Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса. ([3], гл. VIII, §§ 1-7; [6], гл. X; [7], гл. 15,16)

5. Гладкие многообразия и дифференциальные формы.

Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа. ([7],гл. 17; [9], гл. 9)

II. Теория функций комплексного переменного

1. Интегральные представления аналитических функций

Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого. ([12], §§ 5, 11; [5], гл. III, §§ 1-3.)

2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теоремы Вейерштрасса. Разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Вычеты, теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Теорема Рунге о приближении аналитических функций многочленами. ([12], §§ 6-7, 11; [5], гл. III, §§ 4-7, гл. IV, гл. V, § 4.)

3. Целые и мероморфные функции

Рост целой функции, порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями. ([12], §§ 14-15; [5], гл. VII, §§ 1-3.)

4. Конформные отображения

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерий однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях. ([12], §§ 12-13; [5], гл. V, §§ 1-3.)

5. Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления конечного и бесконечного порядка. Принцип симметрии. Отображение многоугольников, формула Кристоффеля-Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства, критерий нормальности. Теорема Пикара. ([12], §§ 8-10, 13; [5], гл. VIII.)

6. Гармонические функции.

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга. ([12], стр. 295–304)

III. Функциональный анализ

1. Метрические и топологические пространства

Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических и топологических пространствах. ([3], гл. II.)

2. Нормированные и топологические линейные пространства

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана-Банаха. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и L^p. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства. ([3], гл. III; [11], гл. IV.)

3. Линейные функционалы и линейные операторы

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма. ([3], гл. IV, §§ 1-3, 5, 6; [11], гл. IV; [4], гл. VI, §1,2; [11], гл. IV; [4], гл. VI, §1,2.)

4. Гильбертовы пространства. Спектральная теория самосопряженных операторов

Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы. ([3], гл. III, § 4, гл. IV, § 6, гл. VII, §§ 2-3; [8], гл. VI–VIII; [10], гл. V)

5. Элементы дифференциального исчисления в линейных пространствах

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона. ([3], гл. X.)

6. Обобщенные функции

Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем. ([1], гл. II; [3], гл. IV, § 4, гл. VIII, § 8; [10], гл. 6, стр. 177–180.)

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики - М.: Наука, 1976.
2. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл - М., Факториал, 1998.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа - М.: Наука, 1976 (1989).
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа - М., Наука, 1965.
5. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2 - М.: Наука, 1967-1968.
6. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной - М., Наука, 1974.
7. Никольский С.М. Курс математического анализа, Т. II - М., Наука, 1975 (1991).
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, Т. 1. Функциональный анализ - М., Мир, 1976
9. Рудин У. Основы математического анализа - М., Мир, 1976
10. Рудин У. Функциональный анализ - М., Мир, 1975
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. V - М., Физматгиз, 1959
12. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т. 1 - М.: Наука, 1985.