

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**



ВЕРЖДАЮ  
Проректор по образовательной  
деятельности  
С. П. Басалаева

13 » августа 2018 г.

**ПРОГРАММА**  
**вступительного испытания для поступающих в аспирантуру**  
**по направлению 01.06.01 Математика и механика**  
**программа (профиль) 01.01.02 Дифференциальные уравнения,**  
**динамические системы и оптимальное управление чисел**  
**в 2018/19 учебном году**

Красноярск 2018

Настоящая программа базируется на следующих дисциплинах: Математический анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики / уравнения в частных производных, алгебра, функциональный анализ, методы вычислений, прикладные вопросы функционального анализа, основы мат. статистики и теории вероятности.

## **1. Перечень вопросов общей части.**

1.1. Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения топологических пространств. Компактность в топологических пространствах.

1.2. Понятие метрического пространства. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений и его применения.

1.3. Мера Лебега. Измеримые функции и их свойства. Теорема Д.Ф.Егорова. Интеграл Лебега и его основные свойства. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

1.4. Гильбертовы и Банаховы пространства. Ортогональные системы функций. Полные системы, критерий полноты. Неравенство Бесселя. Сходимость рядов Фурье в гильбертовом пространстве. Равенство Парсеваля.

1.5. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. Теоремы Фредгольма.

1.6. Линейные пространства и их подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера-Капелли.

1.7. Билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах. Приведение квадратичных форм к нормальному виду. Закон инерции.

1.8. Линейные отображения в линейных пространствах. Собственные векторы и собственные значения. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.

1.9. Группы. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Фактор-группа. Теорема о гомоморфизме.

1.10. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

1.11. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

1.12. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, их классификация. Постановка основных начально-краевых задач для волнового уравнения, теплопроводности и уравнения Лапласа.

1.13. Элементарные функции комплексного переменного и связанные с ними конформные отображения. Дробно-линейные функции. Простейшие многозначные функции.

1.14. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитических функций.

1.15. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Нормальная

кривизна поверхности. Геодезические линии. Формула Эйлера. Гауссова кривизна поверхности.

1.16. Понятие о простейшей проблеме вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

1.17. Схема Бернулли. Теорема Муавра-Лапласа.

1.18. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

## **2. Перечень вопросов специальной части.**

2.1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о продолжении решения. Случай линейных уравнений.

2.2. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и по параметру. Уравнения в вариациях.

2.3. Линейные системы. Определитель Вронского. Теорема Лиувилля. Метод вариации постоянных.

2.4. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Краевые задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.5. Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Теорема об устойчивости по первому приближению.

2.6. Особые точки линейных систем на плоскости.

2.7. Первые интегралы. Теорема о существовании полной системы первых интегралов.

2.8. Квазилинейные уравнения с частными производными 1-го порядка. Задача Коши.

2.9. Смешанная задача для волнового уравнения, единственность решения задачи, решение ее методом Фурье.

2.10. Определение абстрактной функции. Непрерывность абстрактной функции. Производная абстрактной функции.

2.11. Преобразование Фурье и его свойства. Дать определение прямого и обратного преобразования Фурье по одной переменной. Дать определение многомерного преобразования Фурье. Связь с одномерным преобразованием.

2.12. Формула обращения многомерного преобразования Фурье. Сформулировать теорему, в каком случае справедлива данная формула. Указать в каком смысле понимается интеграл.

2.13. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Функция Грина для задачи Дирихле и ее свойства. Функция Грина для шара. Решение задачи Дирихле для шара.

2.14. Свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности.

2.15. Задача Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Единственность. Условие разрешимости задачи Неймана, Внешние задачи. Сведение их к внутренним задачам.

2.16. Уравнение теплопроводности. Первая краевая задача. Принцип максимума. Единственность. Метод Фурье. Задача Коши. Интеграл Пуассона.

2.17. Характеристики уравнений второго порядка. Приведение уравнений к каноническому виду.

2.18. Задача Коши для уравнений колебаний струны. Формула Даламбера.

2.19. Обобщенные (по С.Л. Соболеву) производные. Пространства Соболева  $H^k$ , их свойства. След функции из  $H^1$ .

2.20. Краевые задачи для эллиптического уравнения. Принцип максимума. Однозначная разрешимость в пространстве  $H^1$ . Методы решения.

2.21. Вариационный метод решения краевых задач для эллиптического уравнения.

2.22. Уравнение теплопроводности. Обобщенные решения краевых задач. Применение метода Галеркина к решению краевых задач.

2.23. Волновое уравнение. Обобщенные решения. Применение метода Галеркина к решению краевых задач.

2.24. Понятие обратной и некорректно поставленной задачи. Примеры физических и математических постановок различных обратных задач. Условия переопределения, физический смысл. Прямая задача.

### **Список рекомендованных источников общей части**

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии / П.С.Александров. - М.: Наука, 1985.

2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И.Арнольд. - Ижевск РХД. 2000.

3. Боровков А.А. Математическая статистика / А.А.Боровков. -М.:Физматлит, 2007.

4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С.Владимиров, В.В. Жаринов. - М.: Физматлит, 2003.

5. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. - М: Физматлит, 2006.

6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. / Л.Д.Кудрявцев. - М.: Высшая школа, 1985.

7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры /А.Г.Курош. - М.: Лань, 2007.

8. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры / А.И.Мальцев. - М: Лань, 2009.

9. Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций. В 2 т. / А.И. Маркушевич. - М: Наука, 1978.

10. Михлин С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин// СПб.: Лань, 2002. - 576 с.

11. Никольский СМ. Курс математического анализа. В 2 т. / С.М.Никольский, - М.: Физматлит, 2001.

12. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / И.Г.Петровский. -М: Наука, 1984.

13. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г.Петровский. - М.: Наука, 1970.

- 14.Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. - М.: Наука, 1974.
- 15.Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И.Привалов. -М.: Лань, 2009.
- 16.Рашевский П.К. Дифференциальная геометрия /П.К.Рашевский. - М.: URSS, 2008.
- 17.Треногий В.А. Функциональный анализ:учебник / В.А. Треногий // М.: Физматлит, 2002. - 488 с.
- 18.Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. / В.Феллер. - М.: Мир, 1984.

#### **Список рекомендованных источников специальной части.**

1. Белов Ю.Я. Метод слабой аппроксимации / Ю.Я. Белов, С.А. Кантор//Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1999. - 236 с.
2. Belov Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations / Yu.Ya. Belov // Utrecht: VSP, 2002.-211 p.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. - М.: Физматлит, 2003.
4. Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Греггер, К. Захариас // М.:Мир, 1978.
5. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики / В.Б. Гласко// М.: МГУ, 1979.
6. Годунов С.К. Уравнения математической физики / С.К. Годунов. - М.: Наука, 1971.
7. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач: Учебн. Пособие / А.М. Денисов // М.: Изд-воМГУ, 1994.-208 с.
8. Кабанихин СИ. Обратные и некорректные задачи / СИ. Кабанихин. - Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.
9. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. - М.: Наука, 1973.
10. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. - М.: Наука, 1983.
11. Михлин С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин // СПб.:Лань, 2002. - 576 с.
12. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. -М.: МГУ им. Ломоносова, 1984.
13. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г.Петровский. М.: Наука, 1970.
14. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. - М.: Наука, 1974.
15. Соболев С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. - М.: Наука, 1992.

16. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М: Наука, 1999.

**Составители программы:**

И. В. Фроленков, канд. физ.-мат. наук, доцент,

Ю. Я. Белов, докт. физ.-мат. наук, профессор.

Программа соответствует паспорту номенклатуры специальностей научных работников.